ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1. Τι ονομάζεται συνάρτηση

Συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου *Α* αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου *Β*.

2. *Έστω η συνάρτηση f από το Α στο Β, ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f*

Το σύνολο *Α*, που λέγεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης,

3. *Έστω η συνάρτηση f από το Α στο Β, πότε η f λέγεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής τιμής;*

Αν το Α είναι υποσύνολο του συνόλου *R* των πραγματικών αριθμών, ενώ το *Β* συμπίπτει με το *R* οι συναρτήσεις αυτές λέγονται πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς συναρτήσεις.

4. Αν *f*, *g* δύο συναρτήσεις πως ορίζονται μεταξύ των δυο συναρτήσεων οι πράξεις: άθροισμα, διαφορά, γινόμενο , πηλίκο

Αν δύο συναρτήσεις *f*, *g* ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο *A*, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και
- Το πηλίκο $R = \frac{f}{g}$, με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

5. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση ή καμπύλη της f.

Έστω μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού ένα σύνολο *Α*. Γραφική παράσταση ή καμπύλη της *f* σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

6. Τι ονομάζεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της *f*.

Η εξίσωση $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x,y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της *f* και λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της *f*.

7. Πότε ένα σημείο Μ ανήκει στην καμπύλη της f.

Ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της *f*, μόνο όταν $y = f(x)$.

8. Πότε μια συνάρτηση f, λέγεται γνησίως αύξουσα σε έμα διάστημα Δ.

Μια συνάρτηση *f* λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

9. Πότε μια συνάρτηση f, λέγεται γνησίως φθίνουσα σε έμα διάστημα Δ.

Μια συνάρτηση *f* λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

10. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη.

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται γνησίως μονότονη.

11. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ τοπικό μέγιστο

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A* λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε *x* σε μια περιοχή του x_1.

12. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, παρουσιάζει στο $x_2 \in A$ τοπικό ελάχιστο

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A* λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε *x* σε μια περιοχή του x_2.

13. Τι ονομάζουμε ακρότατα μιας συνάρτησης

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται ακρότατα της συνάρτησης.

14. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής.

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού *A* λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

15. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Αν το $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η *f* είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της *f* στο x_0, συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και διαβάζεται “f τονούμενο του x_0”. Έχουμε λοιπόν: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

16. Τι εκφράζει η παράγωγος της *f στο* σημείο x_0.

- Η παράγωγος της *f* στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το *x*, όταν $x = x_0$.
- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης *f* στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς *x* όταν $x = x_0$.
- Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 $\upsilon(t_0) = f'(t_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς *t* όταν $t = t_0$.

17. Τι ονομάζεται πρώτη παραγώγος της συνάρτησης f.

Έστω μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το *A*, και *B* το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η *f* είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος της *f* και συμβολίζεται με f'.

18. Υπολογίστε την παράγωγο της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$

Έχουμε $f(x+h)-f(x) = c-c = 0$ και για $h \neq 0$, έχουμε $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$,

οπότε $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$. Άρα $(c)' = 0$.

19. Υπολογίστε την παράγωγο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h\neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1=1$. Άρα $(x)'=1$.

20. Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=x^2$

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2xh+h^2-x^2=(2x+h)h$, και για $h\neq 0$,
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(2x+h)h}{h}=2x+h$. Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$.

Άρα $(x^2)'=2x$

21. Υπολογίστε με τη βοήθεια του τύπου $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$ την παράγωγο των: $\frac{1}{x},\frac{1}{x^2},\sqrt{x}$

$\otimes\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-1-1}=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$, $\quad\otimes\left(\frac{1}{x^2}\right)'=(x^{-2})'=-2\cdot x^{-2-1}=-2x^{-3}=\frac{-2}{x^3}$

$\otimes\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

22. Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης $cf(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$.

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x))$,

και για $h\neq 0$ $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c(f(x+h)-f(x)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$. Άρα $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$.

23. Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)+g(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))$, και για $h \neq 0$, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x).$$

Άρα $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

24. Πότε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, λέγεται γνησίως αύξουσα στο Δ.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ* και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο *Δ*.

25. Πότε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, λέγεται γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα *Δ* και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του *Δ*, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο *Δ*.

26. Διατυπώστε το Κριτήριο 1ης παραγώγου για το τοπ. μέγιστο στο διάστημα (α,β)

Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x = x_0$ μέγιστο

27. Διατυπώστε το Κριτήριο 1ης παραγώγου για το τοπ. ελάχιστο στο διάστημα (α,β)

Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x = x_0$ ελάχιστο

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)=0$, για $x_0 \in (\alpha,\ \beta)$ και η παράγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $(\alpha,\ \beta)$ και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

28. Τι ονομάζουμε Στατιστική.

Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:
το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων
τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους
την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

29. Τι ονομάζουμε πληθυσμό; και τι μονάδες ή άτομα του πληθυσμού;

Ένα σύνολο τα στοιχεία του οποίου θέλουμε να εξετάσουμε ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους.

Τα στοιχεία του πληθυσμού συχνά αναφέρονται και ως μονάδες ή άτομα του πληθυσμού.

30. Τι ονομάζουμε στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις;

Στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις ονομάζουμε τα δεδομένα, που προκύπτουν από τη διαδοχική εξέταση των ατόμων του πληθυσμού ως προς ένα χαρακτηριστικό τους.

31. Τι ονομάζουμε μεταβλητές; και τι τιμές της μεταβλητής;

Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές, τις συμβολίζουμε συνήθως με τα κεφαλαία γράμματα $X, Y, Z, B, \ldots$

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται τιμές της μεταβλητής

32. Σε ποιες κατηγορίες διακρίνουμε τις μεταβλητές; και σε ποιες τις ποσοτικές μεταβλητές;

Τις μεταβλητές τις διακρίνουμε:

I. Σε ποιοτικές ή κατηγορικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί. &

II. Σε ποσοτικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:

i) Σε διακριτές μεταβλητές, που παίρνουν μόνο “μεμονωμένες” τιμές.

ii) Σε συνεχείς μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν αποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β).

33. Τι ονομάζουμε απογραφή;

Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται απογραφή (census).

34. Τι ονομάζουμε δείγμα;

Δείγμα ονομάζουμε μια μικρή ομάδα ή ένα υποσύνολο του πληθυσμού απ' όπου ο ερευνητής συλλέγει πληροφορίες όταν η απογραφή είναι δύσκολη, αδύνατη ή οικονομικά και χρονικά ασύμφορη. Κάνει τις παρατηρήσεις του στο δείγμα αυτό και μετά γενικεύει τα συμπεράσματά του για ολόκληρο τον πληθυσμό.

35. Τι ονομάζουμε αντιπροσωπευτικό δείγμα;

Αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού, ονομάζουμε ένα δείγμα εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.

36. Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται οι πίνακες;

Οι πίνακες διακρίνονται σε:

α) γενικούς πίνακες, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα (συνήθως με αρκετά λεπτομερειακά στοιχεία) και αποτελούν πηγές στατιστικών πληροφοριών στη διάθεση των επιστημόνων-ερευνητών για παραπέρα ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων,

β) ειδικούς πίνακες, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς. Τα στοιχεία τους συνήθως έχουν ληφθεί από τους γενικούς πίνακες.

37. Τι πρέπει να περιέχει κάθε πίνακας;

Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:

α) τον τίτλο, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα και δηλώνει με σαφήνεια και συνοπτικά το περιεχόμενο του πίνακα,

β) τις επικεφαλίδες των γραμμών και στηλών, που δείχνουν συνοπτικά τη φύση και τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων,

γ) το κύριο σώμα (κορμό), που περιέχει διαχωρισμένα μέσα στις γραμμές και στις στήλες τα στατιστικά δεδομένα, δ) την πηγή, που γράφεται στο κάτω μέρος του πίνακα και δείχνει την προέλευση των στατιστικών στοιχείων, έτσι ώστε ο αναγνώστης να ανατρέχει σ'αυτήν, όταν επιθυμεί, για επαλήθευση στοιχείων ή για λήψη περισσότερων πληροφοριών.

38. Τι ονομάζουμε απόλυτη συχνότητα ν_i;

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής *X*, ενός δείγματος μεγέθους *ν*, $\kappa \le \nu$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) συχνότητα ν_i, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής *X* στο σύνολο των παρατηρήσεων.

39. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα f_i;και ποιες ιδιότητες της ισχύουν;

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος *ν* του δείγματος, προκύπτει η σχετική συχνότητα) f_i της τιμής x_i, δηλαδή $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

(i) $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$

Απόδειξη Έχουμε ό,τι ισχύει: $0 \le \nu_i \le \nu$ διαιρούμε με ν και έχουμε: $\frac{0}{\nu} \le \frac{\nu_i}{\nu} \le \frac{\nu}{\nu}$

Άρα τελικά έχουμε: $0 \le f_i \le 1$

(ii) $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$,

Απόδειξη Έχουμε ό,τι : $f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$.

40. Τι ονομάζουμε πίνακας κατανομής συχνοτήτων;

Οι ποσότητες x_i, ν_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται πίνακας κατανομής συχνοτήτων ή απλά πίνακας συχνοτήτων.

41. Τι ονομάζουμε κατανομή συχνοτήτων και τι κατανομή σχετικών συχνοτήτων;

Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i, v_i) λέμε ότι αποτελεί την κατανομή συχνοτήτων και το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i), ή των ζευγών $(x_i, f_i\%)$, την κατανομή των σχετικών συχνοτήτων.

42. Τι ονομάζουμε Αθροιστική συχνότητα *(N_i) μιας τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ.*

Αθροιστική συχνότητα (N_i) της τιμής x_i ονομάζουμε το άθροισμα:

$N_i = v_1 + v_2 + \ldots + v_i$, i= 1, 2, …, κ .

Ισχύουν επίσης οι τύποι: $v_1=N_1$, $N_i= N_{i-1}+v_i$, $v_i=N_i-N_{i-1}$, $N_κ=v$

43. Τι εκφράζει η Αθροιστική συχνότητα *(N_i) μιας τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ.*

Η αθροιστική συχνότητα (N_i) εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες δηλαδή το πολύ ίσες από την τιμή x_i και έχει νόημα μόνο για ποσοτικές μεταβλητές.

44. Τι ονομάζουμε Αθροιστική σχετική συχνότητα *(F_i μιας τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ.*

Αθροιστική σχετική συχνότητα (F_i) της τιμής x_i ονομάζουμε το άθροισμα:

$F_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$, με i=1, 2, .., κ.

Ισχύουν επίσης: $f_1= F_1$, $F_i= F_{i-1}+f_i$, $f_i=F_i-F_{i-1}$, $F_κ=1$

45. Τι εκφράζει η Αθροιστική σχετική συχνότητα *(F_i) μιας τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ.*

Η αθροιστική σχετική συχνότητα εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες δηλαδή το πολύ ίσες από την τιμή x_i.και έχει νόημα μόνο για ποσοτικές μεταβλητές.

46. Τι ονομάζουμε ραβδόγραμμα και σε τι είδους μεταβλητές το χρησιμοποιούμε;

Αποτελείται από ορθογώνιες στήλες που οι βάσεις του βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο ή στον κατακόρυφο άξονα. Σε κάθε τιμή της μεταβλητής X αντιστοιχεί μια ορθογώνια στήλη, το ύψος της οποίας είναι ίσο με την αντίστοιχη συχνότητα.

Χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

47. Τι ονομάζουμε διάγραμμα συχνοτήτων και σε τι είδους μεταβλητές το χρησιμοποιούμε;

Είναι αντίστοιχο με το ραβδόγραμμα με τη διαφορά ότι αντί ορθογωνίων χρησιμοποιούμε ευθύγραμμα τμήματα μήκους ίσου με την αντίστοιχη συχνότητα.

Χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

48. Τι ονομάζουμε πολύγωνο συχνοτήτων ή πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Αν ενώσουμε τις κορυφές των ευθυγράμμων τμημάτων ενός διαγράμματος συχνοτήτων ή σχετικές συχνότητες έχουμε αντίστοιχα πολύγωνο συχνοτήτων ή πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

49. Τι ονομάζουμε κυκλικό διάγραμμα *και σε τι είδους μεταβλητές το χρησιμοποιούμε;*

Αποτελείται από κυκλικό δίσκο με αυθαίρετη ακτίνα χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς τα εμβαδά ή ισοδύναμα τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες v_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i. Αν θεωρήσουμε $α_i$ το αντίστοιχο τόξο θα έχουμε: $α_i = 360^o \frac{v_i}{v} = 360^o f_i$

Χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση των τιμών ποιοτικών ή ποσοτικών μεταβλητών όταν οι τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

50. Τι ονομάζουμε σημειόγραμμα και σε τι είδους μεταβλητές το χρησιμοποιούμε;

Αποτελείται από έναν οριζόντιο άξονα στον οποίο παριστάνονται οι τιμές της μεταβλητής. Πάνω από κάθε τιμή σημειώνοντας τελίτσες (σημεία), το πλήθος των οποίων δίνει τη συχνότητα της αντίστοιχης τιμής της μεταβλητής..

Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση, των τιμών μιας μεταβλητής όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις.

51. Τι ονομάζουμε χρονόγραμμα και σε τι είδους μεταβλητές το χρησιμοποιούμε;

Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου (σε έτη, μήνες, μέρες, ώρες κ.τλ.) και ο κάθετος άξονας ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής.

Χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους.

52. Ποια τα βήματα της ομαδοποίησης μιας κατανομής συχνοτήτων

Για να ομαδοποιήσουμε ν παρατηρήσεις σε κλάσεις ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

<u>1ο βήμα:</u> εύρεση αριθμού κλάσεων (κ)

Αν δεν μας δίνεται ο αριθμός των κλάσεων που θέλουμε να ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις μας τότε κάνουμε χρήση του πίνακα. <u>(βλέπε σχολ. βιβλίο σελ. 72)</u>

<u>2ο βήμα:</u> εύρεση πλάτους κλάσης (C)

Πλάτος της κλάσης (C) ονομάζεται η διαφορά του κάτω ορίου της κλάσης από το άνω όριο της κλάσης. Για να κάνουμε κλάσεις ίσου πλάτους (μόνο τέτοιες μας ενδιαφέρουν) υπολογίζουμε το εύρος (R) του δείγματος.

Εύρος (R) του δείγματος: ονομάζεται η διαφορά της μικρότερης παρατήρησης (x_{min}) από την μεγαλύτερη παρατήρηση (x_{max}) δηλαδή $R=x_{max}-x_{min}$

Τέλος υπολογίζουμε το πλάτος c της κλάσης από το πηλίκο R/K.

(Αν χρειαστεί στρογγυλοποιούμε πάντοτε προς τα πάνω). Δηλαδή: $C = \frac{R}{K}$

<u>3ο βήμα:</u> Κατασκευή των κλάσεων

Ξεκινάμε από την μικρότερη παρατήρηση (ή από μια μικρότερη ακέραια από αυτήν) και προσθέτοντας κάθε φορά το πλάτος (C) της κλάσης δημιουργούμε τις κ-κλάσεις.

<u>4ο βήμα:</u> Διαλογή των παρατηρήσεων

Τέλος κάνουμε τη διαλογή των παρατηρήσεων κατά τα γνωστά.

53. Τι ονομάζουμε ιστόγραμμα συχνοτήτων; και με τι ισούται το εμβαδόν ενός ορθογωνίου του;

Ονομάζουμε τη γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα. Αποτελείται από διαδοχικά ορθογώνια (ιστούς) που οι βάσεις βρίσκονται πάνω στον οριζόντιο άξονα και έχουν πλάτος ίσο με το πλάτος c της κλάσης και ύψος τέτοιο ώστε το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου να ισούται με την αντίστοιχη συχνότητα της κλάσης αυτής.

54. Τι ονομάζουμε πολύγωνο συχνοτήτων;

Αν στα ιστογράμματα συχνοτήτων θεωρήσουμε δύο ακόμη υποθετικές κλάσεις, στην αρχή και στο τέλος, με συχνότητα μηδέν και στη συνέχεια ενώσουμε τα μέσα των άνω βάσεων των ορθογωνίων, σχηματίζεται το λεγόμενο πολύγωνο συχνοτήτων

55. Με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ: xx' και πολυγώνου συχνοτήτων;

Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των συχνοτήτων, δηλαδή με το μέγεθος του δείγματος ν.

56. Με τι ισούται το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ: xx' και πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων;

Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων, δηλαδή με 1.

57. Τι ονομάζουμε ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων; και με τι ισούται το εμβαδόν ενός ορθογωνίου του;

Είναι ανάλογο του ιστογράμματος συχνοτήτων μόνο που στη θέση των συχνοτήτων έχουμε τις αθροιστικές συχνότητες.

Το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου ισούται με την αντίστοιχη αθροιστική συχνότητα της κλάσης αυτής.

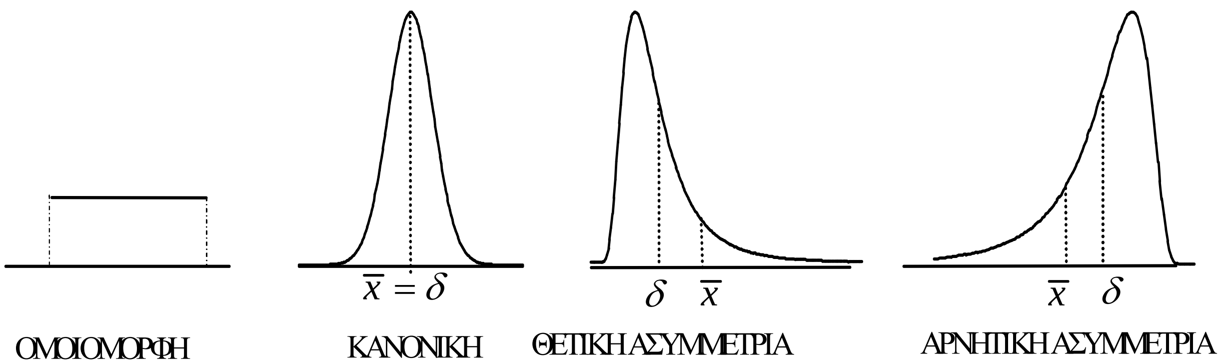
58. Τι ονομάζουμε καμπύλη συχνοτήτων;

Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται καμπύλη συχνοτήτων.

59. Ποιες είναι οι ποιο γνωστές καμπύλες συχνοτήτων;

- **Ομοιόμορφη κατανομή:** Όλες οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα σ' όλη την έκταση του εύρους τους.
- **Κανονική κατανομή:** οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται γύρω από το κέντρο x_o και οι υπόλοιπες κατανέμονται συμμετρικά εκατέρωθεν του κέντρου x_o.
- **Ασύμμετρη κατανομή** (με αρνητική ασυμμετρία):
- οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται δεξιότερα του κέντρου x_o (δηλαδή υπερισχύουν οι «μεγαλύτερες» παρατηρήσεις
- **Ασύμμετρη κατανομή** (με θετική ασυμμετρία):

  οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται αριστερότερα του κέντρου x_o (δηλαδή υπερισχύουν οι «μικρότερες» παρατηρήσεις).



60. Τι ονομάζουμε μέτρα θέσεως και ποια είναι αυτά;

Μέτρα θέσης ονομάζουμε τις αριθμητικές ποσότητες που μας δίνουν τη θέση του «κέντρου» των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα.

Τα μέτρα θέσεως εκφράζουν την «κατά μέσο όρο» απόστασή τους από την αρχή των αξόνων.

Τα μέτρα θέσεως που θα μας απασχολήσουν είναι: ο αριθμητικός μέσος (μέση τιμή), ο σταθμικός μέσος, και η διάμεσος.

61. Πως υπολογίζουμε τον αριθμητικό μέσο (μέση τιμή) ανάλογα με τη μορφή των δεδομένων;

❖ Αν έχουμε αταξινόμητες παρατηρήσεις: $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ τότε η μέση τιμή $\bar{x}$ δίνεται από τον τύπο: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \dfrac{t_1 + t_2 + \ldots + t_\nu}{\nu}$

❖ Αν έχουμε ταξινομημένες παρατηρήσεις: $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ με τις αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ τότε η μέση τιμή $\bar{x}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$$

Αν έχουμε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις σε κ- κλάσεις με κεντρικές τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ και αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\kappa$ τότε η μέση τιμή $\bar{x}$ δίνεται από τον τύπο: $\bar{x} = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$

62. Τι ορίζεται διάμεσος ν παρατηρήσεων;

✶ Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν-παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το *ν* είναι περιττός ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το *ν* είναι άρτιος αριθμός.

ΣΧΟΛΙΑ

Η διάμεσος είναι η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη όταν οι παρατηρήσεις αυτές τοποθετηθούν με σειρά τάξης μεγέθους. Ακριβέστερα, η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Ο τρόπος υπολογισμού της διαφέρει ανάλογα με το αν έχουμε αταξινόμητες παρατηρήσεις, ταξινομημένες ή ομαδοποιημένες σε κλάσεις.

63. Πως υπολογίζουμε τη διάμεσο ανάλογα με τη μορφή των δεδομένων;

- Αν έχουμε αταξινόμητες τις ν-παρατηρήσεις τότε τις διατάσσουμε κατά αύξουσα σειρά και
  - αν ν=2κ+1 (περιττός) τότε η διάμεσος θα είναι η $\delta=x_{\kappa+1}$ (μεσαία παρατήρηση).
  - αν ν=2κ (άρτιος) τότε η διάμεσος θα είναι $\delta=\dfrac{x_\kappa+x_{\kappa+1}}{2}$ (ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων).
- Αν έχουμε ταξινομημένες σε πίνακα συχνοτήτων παρατηρήσεις τότε σχηματίζουμε στον πίνακα τη στήλη N_i (αθροιστικών συχνοτήτων), υπολογίζουμε το ν/2 και βρίσκουμε από τη στήλη N_i, σε ποιο συγκεκριμένο N_i εμπεριέχεται (έστω N_κ), τότε η $\delta=x_\kappa$ (η τιμή που αντιστοιχεί στο N_κ).
- Αν έχουμε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις σε κλάσεις τότε βρίσκουμε γραφικά τη διάμεσο είτε από το πολύγωνο σχ. αθροιστικών συχνοτήτων (F_i%) είτε σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων (F_i) είτε αθροιστικών συχνοτήτων (N_i). Υπολογίζουμε το 50% ή 0,5 ή ν/2 αντίστοιχα, φέρουμε παράλληλη στον x΄x μέχρι να τέμνει το πολύγωνο και από εκεί φέρουμε κάθετη στον x΄x. Η ένδειξη που διαβάζουμε είναι η δ.

64. Τι ονομάζουμε σταθμικό μέσο και τι συντελεστές βαρύτητας;

Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον σταθμικό μέσο που δίνεται από τον τύπο: $\bar{x}=\dfrac{x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_\nu w_\nu}{w_1+w_2+\ldots+w_\nu}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}x_iw_i}{\sum_{i=1}^{\nu}w_i}$

65. Τι ονομάζουμε μέτρα διασποράς και ποια είναι αυτά;

Μέτρα διασποράς ή μέτρα μεταβλητότητας: ονομάζουμε τα αριθμητικά μεγέθη που μας πληροφορούν για την διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το «κέντρο» τους.

Τα σημαντικότερα είναι: το εύρος (R), η διακύμανση (s^2) και η τυπική απόκλιση (s).

66. Τι εκφράζουν τα μέτρα διασποράς.

Τα μέτρα διασποράς: εκφράζουν τις αποκλίσεις των τιμών μιας μεταβλητής γύρω από τα μέτρα κεντρικής τάσης.

67. Πως υπολογίζουμε το εύρος;

Το εύρος ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.

Σε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις το εύρος είναι:η διαφορά του κάτω ορίου της πρώτης κλάσης από το άνω όριο της τελευταίας.

68. Με τι ισούται το R όταν έχουμε κανονική ή περίπου κανονική κατανομή;

Το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.

69. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών $t_i - \bar{x}$ είναι ίσος με το μηδέν.

Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν , με μέση τιμή $\bar{x}$.Θέλουμε να δείξουμε ότι ο αριθμητικός μέσο των διαφορών αυτών, δηλαδή : $\dfrac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+\ldots+(t_\nu-\bar{x})}{\nu} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})}{\nu}$, είναι ίσος με το μηδέν.

Έχουμε: $\dfrac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+\ldots+(t_\nu-\bar{x})}{\nu} = \dfrac{t_1+t_2+\ldots+t_\nu}{\nu} - \dfrac{\nu\bar{x}}{\nu} = \bar{x}-\bar{x} = 0$.

70. Πως υπολογίζουμε την διακύμανση ή διασπορά ανάλογα με τη μορφή των δεδομένων;

Η διασπορά ορίζεται ως ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των τιμών t_i από τη μέση τιμή $\bar{x}$. Δηλαδή:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2}{\nu} = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_1^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2}{\nu} - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Σε περίπτωση που έχουμε πίνακα συχνοτήτων ή ομαδοποίηση έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right) = \sum x_i^2 f_i - \bar{x}^2$$

όπου $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής ή οι κεντρικές τιμές και $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\kappa$ οι αντίστοιχες συχνότητες

71. Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής; Και σε τι μας βοηθά;

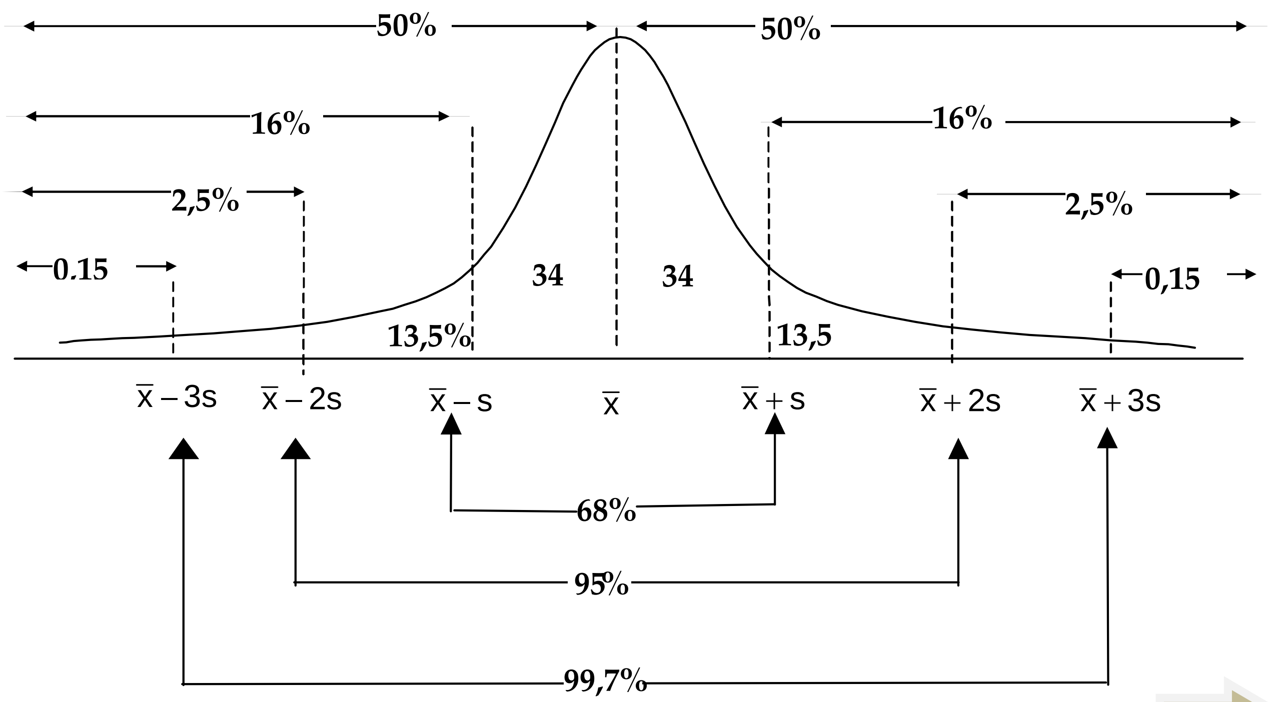
Ο συντελεστής μεταβολής ορίζεται από το λόγο:

$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} \cdot 100\% = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$ εκφράζεται επί τοις εκατό, είναι συνεπώς ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης και παριστάνει ένα μέτρο σχετικής διασποράς των τιμών και όχι της απόλυτης διασποράς, όπως έχουμε δει έως τώρα.

Ο συντελεστής μεταβολής μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές,

Προσοχή!!! Αν $\bar{x} < 0$ τότε αντί του $\bar{x}$ βάζουμε το $|\bar{x}|$ στον τύπο του συντ. μεταβολής.

72. Δώστε τα ποσοστά των παρατηρήσεων όταν έχουμε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή.



73. Πότε θα λέμε ένα δείγμα ομοιογενές;

Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

74. Τι αλλάζει σε μέση τιμή και τυπ. απόκλιση αν έχουμε $y_i = x_i + c$

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s.

Αν $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν από τον τύπο $y_i = x_i + c$ τότε έχουμε: $\bar{y} = \bar{x} + c$ και $s_y = s_x$

75. Τι αλλάζει σε μέση τιμή και τυπ. απόκλιση αν έχουμε $y_i = c \cdot x_i$

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s.

Αν $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν από τον τύπο $y_i = c \cdot x_i$ τότε έχουμε

$\bar{y} = c\bar{x}$ και $s_y = |c| s_x$.

76. Τι αλλάζει σε μέση τιμή και τυπ. απόκλιση αν έχουμε $y_i = \alpha \cdot x_i + \beta$

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s.

Αν $y_1, y_2, \dots, y_\nu$ παρατηρήσεις όπου $y_i = \alpha x_i + \beta$ τότε θα έχουμε $\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$ και $s_y = |\alpha| \cdot s_x$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

77. Τι ονομάζουμε αιτιοκρατικό πείραμα;

Κάθε πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται αιτιοκρατικό (deterministic) πείραμα.

78. Τι ονομάζουμε πείραμα τύχης;

Πείραμα τύχης κάθε πείραμα που είναι δυνατόν να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες χωρίς να μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του. π.χ. η ρίψη ενός ζαριού.

79. Τι ονομάζουμε δειγματικό χώρο Ω;

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος. Ο δειγματικός χώρος συμβολίζεται με Ω.

80. Τι ονομάζουμε ενδεχόμενο Α;

Ενδεχόμενο ή γεγονός ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω του πειράματος.

81. Πότε ένα ενδεχόμενο Α λέγεται απλό και πότε σύνθετο;

Απλό ή στοιχειώδες ενδεχόμενο λέγεται κάθε υποσύνολο του Ω. που έχει μόνο ένα στοιχείο.

Σύνθετο ενδεχόμενο λέγεται κάθε υποσύνολο του Ω που έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

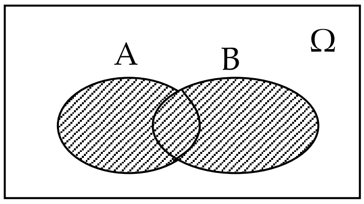
Το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου Α το συμβολίζουμε με $N(A)$ και το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω το συμβολίζουμε με $N(\Omega)$.

82. Ποιο ενδεχόμενο ονομάζεται βέβαιο και ποιο αδύνατο;

Το Ω καλείται βέβαιο ενδεχόμενο αφού πραγματοποιείται πάντοτε.

Το $\varnothing$ καλείται αδύνατο ενδεχόμενο αφού δεν πραγματοποιείται ποτέ.

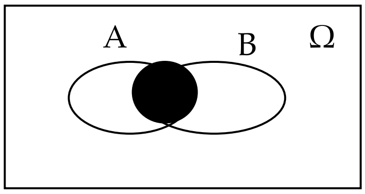
83. Τι ονομάζεται ένωση δυο ενδεχομένων Α και Β; - Διάγραμμα.



Ένωση των ενδεχομένων Α, Β ονομάζουμε το ενδεχόμενο που έχει ως στοιχεία του, όλα τα στοιχεία των Α και Β.

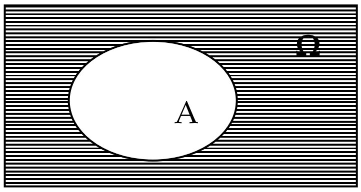
Συμβ. $A\cup B$ Δηλαδή: $A\cup B=\{\omega\in\Omega \;/\; \omega\in A$ ή $\omega\in B\}$

84. Τι ονομάζεται τομή δυο ενδεχομένων Α και Β; - Διάγραμμα.



Τομή των ενδεχομένων Α, Β ονομάζουμε το ενδεχόμενο που έχει ως στοιχεία του τα κοινά στοιχεία των Α και Β.

Συμβ. $A\cap B$ Δηλαδή: $A\cap B=\{\omega\in\Omega \;/\; \omega\in A$ και $\omega\in B\}$

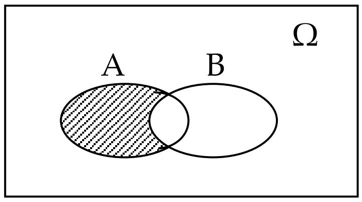


85. Τι ονομάζεται συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου Α; - Διάγραμμα.

Αντίθετο ή Συμπληρωματικό του ενδεχομένου Α ονομάζουμε το ενδεχόμενο που έχει ως στοιχεία του όλα τα στοιχεία του Ω που δεν είναι στοιχεία του Α.

Συμβ. με A' Δηλαδή: $A'=\{\omega\in\Omega \;/\; \omega\notin A\}$

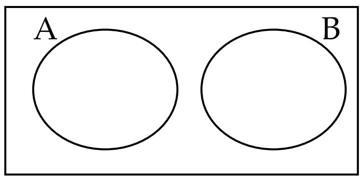
86. Τι ονομάζουμε διαφορά του Β από το Α; - Διάγραμμα.



Διαφορά του Β από το Α ονομάζουμε το ενδεχόμενο που έχει ως στοιχεία όλα τα στοιχεία του Α που δεν ανήκουν στο Β.

Συμβ. με $A-B$ Δηλαδή: $A-B=\{\omega\in\Omega \;/\; \omega\in A$ και $\omega\notin B\}$

87. Πότε δυο ενδεχόμενα Α, Β λέγονται ξένα ή ασυμβίβαστα;



Δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω θα λέγονται ασυμβίβαστα ή ξένα όταν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, δηλαδή όταν έχουμε: $A\cap B=\varnothing$

88. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα του Α και ποιες οι ιδιότητες της;

Αν επαναλάβουμε ένα πείραμα τύχης ν-φορές και κάποιο ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται κ φορές τότε ο λόγος κ/ν ονομάζεται σχετική συχνότητα του ενδεχομένου Α και συμβολίζεται με f_κ δηλαδή έχουμε: $f_K = \frac{\kappa}{\nu} = \frac{\text{αριθμός πραγματοποιήσεων του Α}}{\text{αριθμός επαναλήψεων πειράματος}}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΧΕΤΙΚΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι το πεπερασμένο σύνολο Ω={ω_1, ω_2, ..., ω_λ} και σε ν-εκτελέσεις του πειράματος τα απλά ενδεχόμενα {ω_1}, {ω_2}... {ω_λ} πραγματοποιούνται κ_1, κ_2, ..., κ_λ φορές αντίστοιχα τότε για τις σχετικές συχνότητες: $f_i = \frac{\kappa_i}{\nu}$, i=1, 2, …, λ ισχύουν:

α) $0 \le f_i \le 1$, i=1, 2,…, λ

β) $f_1+f_2+\ldots+f_\lambda=1$

89. Τι ονομάζεται στατιστικλη ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών;

Οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών.

90. Ποιος είναι ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας και πότε χρησιμοποιείται;

Έστω Ω={ω_1, ω_2, ..., ω_ν} ένας πεπερασμένος δ.χ. του οποίου τα απλά ενδεχόμενα:

{ω_1}, {ω_2}...{ω_ν} είναι ισοπίθανα. Αν Α είναι ένα ενδεχόμενο του Ω, τότε ορίζουμε ως πιθανότητα του Α τον αριθμό: $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}$ Από τον ορισμό έχουμε:

✪ $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$, ✪ $P(\varnothing) = \frac{N(\varnothing)}{N(\Omega)} = 0$, ✪ $0 \le P(A) \le 1$ για κάθε ενδεχόμενο Α.

91. Πότε εφαρμόζεται ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας;

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας εφαρμόζεται όταν ο δ. χ. είναι πεπερασμένος και αποτελείται από απλά και ισοπίθανα ενδεχόμενα

Αν ο δ. χ. Ω έχει ν στοιχεία και εμείς «επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω» τότε όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα ω_i είναι ισοπίθανα, με πιθανότητα $P(\omega_i)=\frac{1}{\nu}$

92. Ποιος είναι ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας;

Έστω $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ένας δ. χ. με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων (όχι ισοπίθανα απαραίτητα). Κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ έχει πιθανότητα $P(\omega_i)$. Ισχύουν τότε τα εξής:

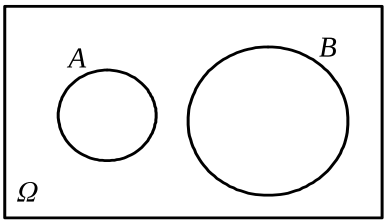
- $0\le P(\omega_i)\le 1$, i=1, 2, …, ν
- $P(\omega_1)+P(\omega_2)+...+P(\omega_\nu)=1$

Αν $A=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$ ένα μη κενό υποσύνολο του Ω τότε: $P(A)=P(\alpha_1)+P(\alpha_2)+...+P(\alpha_\kappa)$. Ισχύουν επίσης:

- $P(\Omega)=1$
- $P(\varnothing)=0$
- $0\le P(A)\le 1$ για κάθε ενδεχόμενο Α

93. Αποδείξτε τον τύπο: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ αν τα Α , Β είναι ασυμβίβαστα.

Αν $N(A)=\kappa$ και $N(B)=\lambda$, τότε το $A\cup B$ έχει $\kappa+\lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα *A* και *B* δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A\cup B)=\kappa+\lambda=N(A)+N(B)$.



$A\cup B$

Επομένως

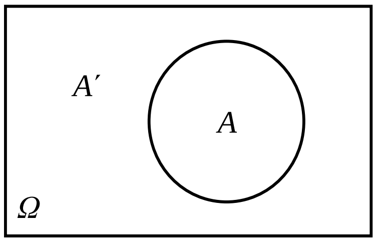
$$P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}$$

$$=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}=P(A)+P(B).$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως απλός προσθετικός νόμος

94. Αποδείξτε τον τύπο: $P(A') = 1 - P(A)$

Επειδή $A \cap A' = \varnothing$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:



$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A').$$

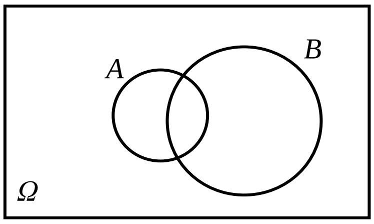
Οπότε $P(A') = 1 - P(A)$

95. Αποδείξτε τον τύπο: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$,(1)

αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές. Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:



$A \cup B$

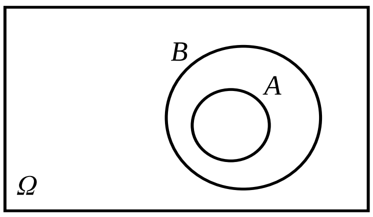
$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως προσθετικός νόμος

96. Αποδείξτε τον τύπο: Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \le P(B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

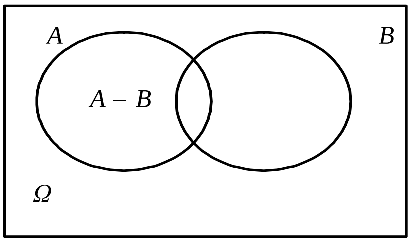


Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά: $N(A) \le N(B)$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \le \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A) \le P(B).$$

97. Αποδείξτε τον τύπο: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $A\cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B)\cup(A\cap B)=A$, έχουμε:

$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$.

Άρα $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.