

Λύσεις θεμάτων **ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ -2-** Πανελλαδικών Εξετάσεων 2016

Στο μάθημα: « Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και
Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής»

Γ' Λυκείου,

23/03/2016

ΘΕΜΑ 1^ο :

A1. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μίας συνάρτησης f στο διάστημα Δ ;

Απάντηση

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat και να το αποδείξετε.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \quad \text{και} \quad f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι «κάτω» από τη C_f εκτός από το κοινό τους σημείο.

Σωστό (συμπληρώθηκε η πρόταση με κόκκινα γράμματα για να είναι Σωστή αλλιώς είναι λανθασμένη)

β. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx.$$

Λάθος

γ. Αν υπάρχουν στο \mathbb{R} τα όρια των συναρτήσεων f και g , τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

Σωστό

δ. Αν το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε $f''(x_0) = 0$.

Σωστό

ε. Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε:

$$\int_a^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^{\beta} - \int_a^{\beta} f'(x)g(x) dx.$$

Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$ και $g(x) = \frac{1}{x^2} + 2$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f καθώς και το πλήθος των ριζών της.

B3. Να ορίσετε την f^{-1} .

B4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι αντιστρέψιμη.

B5. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

ΛΥΣΗ

B1. Πρέπει να ισχύει:

$$e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$$

Επομένως $D_f = [\ln 2, +\infty)$

B2. Θα εξετάσουμε την μονοτονία της f . Έχουμε διαδοχικά:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 2 < e^{x_2} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1} - 2} < \sqrt{e^{x_2} - 2} \Leftrightarrow \sqrt{e^{x_1} - 2} + 3 < \sqrt{e^{x_2} - 2} + 3$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, +\infty)$.

Σημείωση: Μπορεί, πιο εύκολα, η μονοτονία της συνάρτησης f να προκύψει και ως εξής:
 Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$$f'(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{e^x - 2}}, \quad x > \ln 2. \text{ Άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [\ln 2, +\infty).$$

Έτσι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $\left[f(\ln 2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$ με

$$f(\ln 2) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4\sqrt{e^x - 2} + 3) = +\infty, \text{ δηλαδή το σύνολο τιμών είναι το}$$

διάστημα $[3, +\infty)$. Η f δεν έχει ρίζες αφού $f(x) \geq 3$, για κάθε $x \in [\ln 2, +\infty)$.

B3. Για κάθε $y \in [3, +\infty)$ έχουμε διαδοχικά:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 4\sqrt{e^x - 2} + 3 \Leftrightarrow \frac{y-3}{4} = \sqrt{e^x - 2} \Leftrightarrow \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 = e^x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + 2 \Leftrightarrow x = \ln\left[\left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + 2\right]$$

Επομένως:

$$f^{-1}(x) = \ln\left[\left(\frac{x-3}{4}\right)^2 + 2\right], x \in [3, +\infty)$$

B4. Η συνάρτηση g είναι άρτια, αφού $g(x) = g(-x) = \frac{1}{x^2} + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Επομένως η g δεν είναι αντιστρέψιμη.

B4. Για το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ έχουμε:

$$D_{f \circ g} = \left\{x \in D_g / g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^* / \frac{1}{x^2} + 2 \geq \ln 2\right\} = \mathbb{R}^*$$

(αφού $\frac{1}{x^2} + 2 > 1$, $\ln 2 < 1$ είναι πάντα αληθείς)

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4\sqrt{e^{\frac{1}{x^2} + 2} - 2} + 2$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x, x > 0.$$

Γ1. Να δείξετε ότι:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$

να είναι σημείο καμπής της C_f .

Γ4. i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση

της C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$, $x = e$.

ΛΥΣΗ

Γ1. Έχουμε:

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \stackrel{x>0}{\iff} 2x^2 \cdot \ln x + 1 > 0,$$

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = 2x^2 \cdot \ln x + 1, \quad x > 0.$$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$g'(x) = 4x \cdot \ln x + 2x = 2x \cdot (2 \ln x + 1)$$

και έχουμε:

$$g'(x) = 0 \iff 2x \cdot (2 \ln x + 1) = 0 \stackrel{x>0}{\iff} \ln x = -\frac{1}{2} \iff x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

και

$$g'(x) > 0 \iff 2x \cdot (2 \ln x + 1) > 0 \stackrel{x>0}{\iff} \ln x > -\frac{1}{2} \iff x > \frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$g'(x) < 0 \iff 2x \cdot (2 \ln x + 1) < 0 \stackrel{x>0}{\iff} \ln x < -\frac{1}{2} \iff 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο

$\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το:

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0.$$

Επομένως:

$$g(x) \geq g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{e-1}{e} > 0 \text{ για κάθε } x > 0,$$

άρα αποδείξαμε ότι:

$$2x \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Γ2. Έχουμε: Η f είναι και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$f'(x) = [(x^2 + 1) \cdot \ln x]' = 2x \ln x + x + \frac{1}{x} = x + \left(2x \ln x + \frac{1}{x}\right) > 0$$

Αφού:

$$x > 0 \text{ και } 2x \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ από το προηγούμενο ερώτημα.}$$

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης το $x = 1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$, η οποία λόγω της μονοτονίας της f είναι και μοναδική.

Γ3. Έχουμε: Η f' είναι και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με;

$$f''(x) = \left(2x \ln x + x + \frac{1}{x}\right)' = 2 \ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2} \text{ και}$$

$$f^{(3)}(x) = \left(2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Αφού $f^{(3)}(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης $f''\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε:

$$0 < x < x_0 \stackrel{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\iff} f''(x) < f''(x_0) = 0$$

και

$$x > x_0 \stackrel{f'' \text{ γν.αύξ.}}{\iff} f''(x) > f''(x_0) = 0.$$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

Γ4. i. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \ln x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) \cdot \ln x = -\infty$$

αφού:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

ii. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^e |f(x)| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx + \int_1^e f(x) dx = -I_1 + I_2, \text{ όπου } I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx \text{ και } I_2 = \int_1^e f(x) dx$$

αφού, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$$

$$\frac{1}{e} < x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$$

Έχουμε:

$$I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (x^2 + 1) \cdot \ln x dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{x^3}{3} + x \right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3e^3} + \frac{1}{e} - \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) dx = \frac{1}{3e^3} + \frac{1}{e} - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{e}}^1 - [x]_{\frac{1}{e}}^1 = \frac{1}{3e^3} + \frac{1}{9e^3} + \frac{2}{e} - \frac{10}{9}$$

$$I_2 = \int_1^e (x^2 + 1) \cdot \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} + x \right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + x \right) dx = \frac{e^3}{3} + e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) dx =$$

$$= \frac{e^3}{3} + e - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e - [x]_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{10}{9}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \frac{1}{3e^3} + \frac{1}{9e^3} + \frac{2}{3} + \frac{2e^3}{9} \tau.μ$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με

$$f'(0) = f(0) = 0, \text{ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:}$$

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x f''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \ln(e^x - x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο

$$\text{διάστημα } \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 (e^x - 1) \frac{f(x)}{e^x - x} dx$$

ΛΥΣΗ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} e^x (f'(x) + f''(x) - 1) &= f'(x) + x f''(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + x f''(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (e^x f'(x) - e^x)' = (x f''(x))' \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x = x f''(x) + c \quad (1) \end{aligned}$$

Για $x = 0$ είναι $0 - 1 = 0 + c \Leftrightarrow c = -1$. Επομένως από την σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} e^x f'(x) - e^x &= x f''(x) + 1 \Leftrightarrow e^x f'(x) - x f''(x) = e^x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = [\ln |e^x - x|]' \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = \ln |e^x - x| + c_1 \quad (2) \end{aligned}$$

Για $x = 0$ είναι $0 = 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$. Επομένως από την σχέση (2) έχουμε $f(x) = \ln |e^x - x|$ (3).

Θα εξετάσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $h(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$. Η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x \in \mathbb{R}$ με $h'(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ h'(x) &> 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ h'(x) &< 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

Άρα η $h(x)$ έχει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, δηλαδή $h(x) \geq h(0) = 1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

Δ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι:}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ f'(x) &> 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ f'(x) &< 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $x_0 = 0$, το $f(0) = 0$ (επειδή η f είναι και συνεχής στο 0).

Δ3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$$f''(x) = \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}, x \in \mathbb{R}. \text{ Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση } (2-x)e^x - 1 \text{ έχει}$$

ακριβώς δύο ρίζες. Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $K(x) = (2-x)e^x - 1, x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$K'(x) = -e^x + (2-x)e^x = e^x(1-x), x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$K'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$K'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα η $K(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $x_1 = 1$ το $K(1) = e - 1 > 0$.

Θα βρούμε τις εικόνες $K((-\infty, 1]), K([1, +\infty))$. Έχουμε:

$$K((-\infty, 1]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} K(x), K(1) \right] = (-1, e - 1]$$

$$K([1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} K(x), K(1) \right] = (-\infty, e - 1]$$

αφού:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} K(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(2-x)e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = -\infty$$

Επειδή $0 \in (-1, e - 1]$ και $0 \in (-\infty, e - 1]$ η $K(x)$ έχει μία ρίζα ξ_1 στο $(-\infty, 1]$ και μία ρίζα ξ_2 στο $[1, +\infty)$, οι οποίες είναι μοναδικές, επειδή η $K(x)$ είναι «1-1» στα διαστήματα αυτά (ως γνησίως μονότονη στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[1, +\infty)$ αντίστοιχα). Για να αποδείξουμε όμως ότι τα σημεία $A(\xi_1, f(\xi_1))$ και $B(\xi_2, f(\xi_2))$ είναι σημεία καμπής της C_f πρέπει να αποδείξουμε ότι η $f''(x)$ (ισοδύναμα η $K(x)$) αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ξ_1, ξ_2 .

Έχουμε:

$$1 > x > \xi_1 \Rightarrow K(x) > K(\xi_1) \Rightarrow K(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

$$x < \xi_1 \Rightarrow K(x) < K(\xi_1) \Rightarrow K(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$x > \xi_2 \Rightarrow K(x) < K(\xi_2) \Rightarrow K(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

$$1 < x < \xi_2 \Rightarrow K(x) > K(\xi_2) \Rightarrow K(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

Επομένως η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής τα $\xi_1 \in (-\infty, 1]$ και $\xi_2 [1, +\infty)$.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln(e^x - x) - \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Από το θεώρημα του

Bolzano έχουμε:

Η $h(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

- $h(0) = -1 < 0$
- $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ (διότι $\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) = 0$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$). Άρα $h(0) \cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

- Επομένως υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{x_0} - x_0) - \sin x_0$. Για τη μοναδικότητα του x_0 θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη (ή «1-1» με τον ορισμό). Η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} (ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $h'(x) = f'(x) + \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h'(x) > 0$, διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$ και $\eta \mu x > 0$. Άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Δ5. Έχουμε:

$$I = \int_0^1 (e^x - 1) \frac{f(x)}{e^x - x} dx = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} \cdot f(x) dx = \int_0^1 f'(x) \cdot f(x) dx = [f(x)f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx.$$

Επομένως:

$$I = f^2(1) - f^2(0) - I \Leftrightarrow 2I = \ln^2(e-1) \Leftrightarrow I = \frac{\ln^2(e-1)}{2}.$$