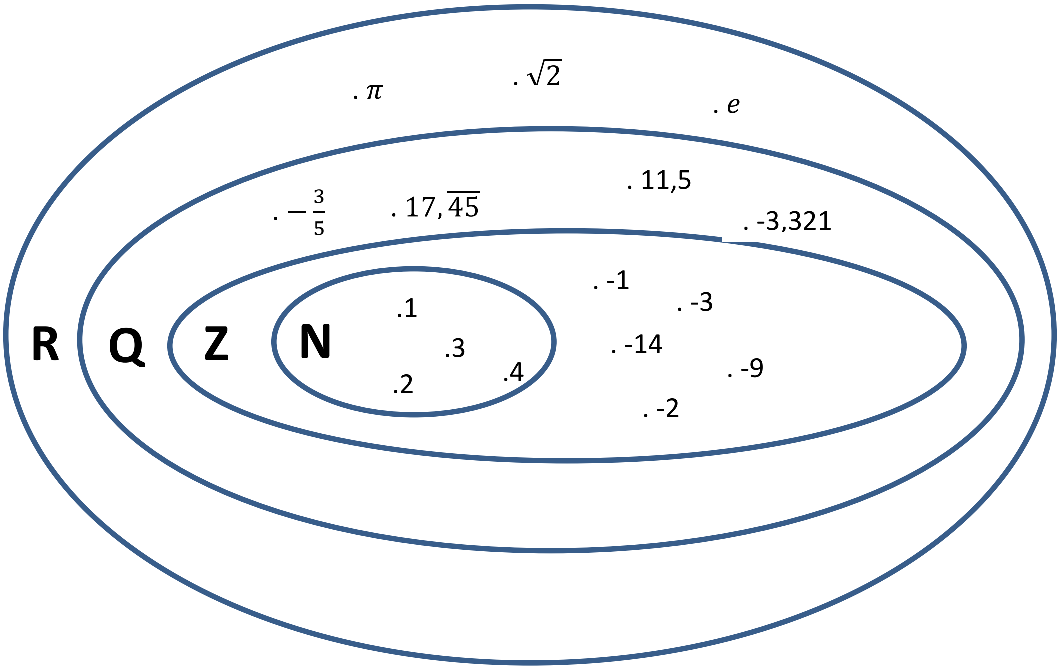
2.1 Οι Πράξεις και οι ιδιότητες τους

Τα Σύνολα Αριθμών



N: Φυσικοί αριθμοί {0, 1, 2, 3, ...}

Z: Ακέραιοι αριθμοί Οι φυσικοί αριθμοί με + ή – μπροστά. (Π.χ. -2, +14, +25, -77)

Q: Ρητοί αριθμοί Όσοι μπορούν να γραφούν σαν κλάσμα ακέραιων αριθμών. Κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί ν γραφεί σαν κλάσμα.

Q' Άρρητοι αριθμοί Οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, δηλ. έχουν άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία όπως είναι ο π.

R: Πραγματικοί αριθμοί ΟΛΟΙ

Αναγραφή περιοδικού δεκαδικού ως κλάσμα

Έστω ο περιοδικός δεκαδικός x=5,232323… . (1)
Αν τον πολλαπλασιάσουμε με το 100 προκύπτει 100x=523,2323… . (2)
Αφαιρούμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις (2) και (1) και έτσι έχουμε 100x-x=518 άρα 99x=518 και τελικά $x = \frac{518}{99}$.
Για τον αριθμό 2,178178178 πολλαπλασιάζουμε με το 1000 και ούτω καθεξής.

Άρτιοι Αριθμοί – Περιττοί Αριθμοί - Πολλαπλάσια

Άρτιοι, ονομάζονται οι ακέραιοι που μπορούν να γραφούν στην μορφή 2κ, όπου κ είναι ακέραιος. Π.χ. 6 (γράφεται $2\cdot 3$) , -12 (γράφεται $2\cdot(-6)$).

Περιττοί, ονομάζονται οι ακέραιοι που μπορούν να γραφούν στην μορφή 2κ+1, όπου κ είναι ακέραιος. Π.χ. -9 (γράφεται $2\cdot(-5)+1$) , 13 (γράφεται $2\cdot 6+1$).

Ένας ακέραιος αριθμός α λέγεται **πολλαπλάσιο** του ακέραιου β εάν υπάρχει ακέραιος λ ώστε: $\alpha = \lambda\beta$. Ο αριθμός 21 είναι πολλαπλάσιο του 7 διότι $21 = 3 \cdot 7$.

Ιδιότητες Πρόσθεσης και Πολλαπλασιασμού

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	α+β=β+α	αβ=βα
Προσεταιριστική	(α+β)+γ=α+(β+γ)	(αβ)γ=α(βγ)
Ουδέτερο στοιχείο	α+0=α	α·1=α
Αντίθετος/ Αντίστροφος	α+(-α)=0	α· (1/α)=1, α≠0
Επιμεριστική	α(β+γ)=αβ+αγ	

- Η Αντιμεταθετική ιδιότητα (αλλαγή θέσης στους όρους της πράξης) ισχύει για τις πράξει πρόσθεση και πολλαπλασιασμό μόνο.
- Σε όλα τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ ο παρονομαστής δεν μπορεί να είναι 0. Όταν λοιπόν θα συναντάμε ένα κλάσμα αυτόματα θα συμπεραίνουμε ότι $\beta \neq 0$.
- Δύο μη μηδενικοί αριθμοί α και β, είναι αντίστροφοι εάν αβ=1.

1. α=β και γ=δ => α+γ=β+δ
2. α=β και γ=δ => α·γ=β·δ
3. α=β ⇔ α+γ=β+γ (Προσοχή! είναι ⇔)
4. α=β ⇔ α·γ=β·γ, όπου γ≠0 (Προσοχή! είναι ⇔)
5. α·β=0 ⇔ α=0 ή β=0 ή α·β≠0 ⇔ α≠0 και β≠0 (Προσοχή! είναι ⇔)

- Η αντίστροφη σχέση της 3ης ιδιότητας λέει με απλά λόγια ότι σε μία εξίσωση μπορούμε να διαγράψουμε τον κοινό προσθετέο και από τα δύο μέλη.
- Η αντίστροφη σχέση της 4ης ιδιότητας λέει με απλά λόγια ότι σε μία εξίσωση μπορούμε να διαγράψουμε τον κοινό παράγοντα και από τα δύο μέλη <u>αρκεί</u> να μην είναι το 0.

Ιδιότητες Αναλογιών

Λόγος δύο αριθμών α και β ονομάζεται το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$.

Αναλογία ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων.

1. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$
2. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

3. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$
4. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Δυνάμεις- Ορισμός

1. $\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ \cdots\alpha}_{\nu\ \varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma}$, για ν ≥ 1
2. $\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}$, για ν <0
3. $\alpha^0=1$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν $\alpha\beta\neq 0$ τότε ισχύει $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

Δυνάμεις- Ιδιότητες

1. $\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa+\lambda}$
2. $\alpha^{\kappa}\cdot\beta^{\kappa}=(\alpha\beta)^{\kappa}$
3. $\frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda}$
4. $\frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$
5. $(\alpha^{\kappa})^{\lambda}=\alpha^{\kappa\lambda}$

Ταυτότητες

Ταυτότητα ονομάζουμε κάθε εξίσωση που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών της.

1. $(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$
2. $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$
3. $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$
4. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$
5. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
6. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^{2+}\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$

Ασκήσεις

1. Βρείτε τα λάθη στις παρακάτω πράξεις:
   i. $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^2=\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2=\alpha\beta-\beta^2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\beta(\alpha-\beta) \Leftrightarrow \alpha+\beta=\beta \Leftrightarrow 2\beta=\beta \Leftrightarrow 2=1$
   ii. $\alpha=(\beta+3)/2 \Leftrightarrow 2\alpha=\beta+3 \Leftrightarrow 2\alpha(\beta-3)=(\beta+3)(\beta-3) \Leftrightarrow 2\beta\alpha-6\alpha=\beta^2-9 \Leftrightarrow 9-6\alpha=\beta^2-2\beta\alpha \Leftrightarrow 9-6\alpha+\alpha^2=\beta^2-2\beta\alpha+\alpha^2 \Leftrightarrow (3-\alpha)^2=(\beta-\alpha)^2 \Leftrightarrow (3-\alpha)=(\beta-\alpha) \Leftrightarrow \beta=3$
2. Αν οι αριθμοί χ-1 και ψ-1 είναι αντίστροφοι να δείξετε ότι χ+ψ=χψ
3. Αν οι αριθμοί $\alpha-\frac{1}{2}$ και β-2 είναι αντίστροφοι να δείξετε ότι
   i. 4α+β=2αβ
   ii. Οι αριθμοί $\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{4}$ και $\alpha\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}\right)+\frac{\beta}{2}$ είναι αντίθετοι

4. Έστω ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$, να υπολογιστούν οι ακόλουθες παραστάσεις:
   i. $\frac{2\alpha+\beta}{\beta}$
   ii. $\frac{4\alpha+7\beta}{8\alpha-5\beta}$
5. Να βρείτε α, β, γ αν ισχύουν α+β+γ=36 και $\frac{\alpha}{8} = \frac{\beta}{7} = \frac{\gamma}{3}$
6. Να βρείτε α, β, γ αν ισχύουν 3α-3β+γ=12 και $\frac{\alpha}{8} = \frac{\beta}{7} = \frac{\gamma}{3}$
7. Αν ο ν είναι ακέραιος, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
   i. $(-1)^{\nu}+(-1)^{\nu-1}-(-1)^{\nu+1}$
   ii. $(-1)^{\nu+1}+(-1)^{\nu-2}-(-1)^{\nu-1}$ (να πάρετε περιπτώσεις)
   iii. $(-1)^{3\nu+1}-(-1)^{\nu+2}-(-1)^{5\nu-1}$ (να πάρετε περιπτώσεις)
8. Αν ο ν είναι φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $3^{\nu}+3^{\nu+1}+3^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 13.
9. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
   i. $x^2 - 5x + 6$
   ii. $x^2 + 3x + 2$
   iii. $x^2 - x - 2$