

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (03-6-2000)
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ - Γ' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο:

A. α) Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Μονάδες 8

β) Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$c f(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x) \neq 0$, όπου c πραγματική σταθερά.

Μονάδες 4,5

B. α) Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη A συνάρτηση	Στήλη B πρώτη παράγωγος
α. $x^2 + 3$	1. $1 - \eta\mu x$
β. $x + \sigma\upsilon\nu x$	2. $3x^2 - 8x$
γ. $x \eta\mu x$	3. $2x + 3$
δ. $x^3 - 4x^2$	4. $\eta\mu x - x \sigma\upsilon\nu x$
	5. $2x$
	6. $3x^2 - 4x$
	7. $\eta\mu x + x \sigma\upsilon\nu x$

Μονάδες 8

β) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \neq 0$ είναι:

A: e^x B: $\frac{e^x - x e^x}{x^2}$ Γ: $\frac{e^x x + e^x}{x^2}$ Δ: $\frac{e^x x - e^x}{x^2}$ E: $\frac{x e^x - e^x}{x}$

Μονάδες 4,5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

A) α) θεωρία σελ. 31

β) $(c f(x))' = c f'(x)$

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

B) α) $\alpha \rightarrow 5$ $\beta \rightarrow 1$ $\gamma \rightarrow 7$ $\delta \rightarrow 2$

β) Δ

ΘΕΜΑ 2^ο:

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής X σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές Μεταβλητής x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
1	10				10	1	10
2				35		4	
3						9	
ΣΥΝΟΛΟ	$v = 50$	1	100				

Μονάδες 16

Β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 4

Γ. Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι $s^2 = 0,49$. Δίνεται ότι: $s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right\}$

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Α.

Τιμές Μεταβλητής x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i v_i$	x_i^2	$x_i^2 v_i$
1	10	0,20	20	10	10	1	10
2	25	0,50	50	35	50	4	100
3	15	0,30	30	50	45	9	135
ΣΥΝΟΛΟ	$v = 50$	1	100		105		245

$$\text{Β. } \bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{105}{50} = 2,1$$

$$\delta = \frac{25\eta \text{ παρατ} + 26\eta \text{ παρατ}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

$$\text{Γ. } s^2 = \frac{1}{50} \left(245 - \frac{105^2}{50} \right) = \frac{1}{50} (245 - 220,5) = \frac{24,5}{50} = 0,49$$

ΘΕΜΑ 3^ο:

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δυο διαγωνισμούς.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

A. να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 8

B. να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 8

Γ. να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Έστω A το ενδεχόμενο «ο μαθητής να συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας» και B το ενδεχόμενο «ο μαθητής να συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών», οπότε έχουμε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{24}{120} \qquad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{20}{120} \qquad P(A \cap B) = \frac{12}{120}$$

A. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{24}{120} + \frac{20}{120} - \frac{12}{120} = \frac{32}{120}$

B. Τα $A-B$, $B-A$ είναι ασυμβίβαστα οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} P((A-B) \cup (B-A)) &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \\ &= \frac{24}{120} + \frac{20}{120} - 2 \frac{12}{120} = \frac{20}{120} \end{aligned}$$

Γ. $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{32}{120} = \frac{88}{120}$

ΘΕΜΑ 4^ο:

Στα σχολεία ενός Δήμου υπηρετούν συνολικά 100 εκπαιδευτικοί. Ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας των εκπαιδευτικών δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας (-)	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$
0-5	10
5-10	15
10-15	12
15-20	15
20-25	18
25-30	18
30-35	12

A. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας;

Μονάδες 5

B. Με την προϋπόθεση ότι κάθε εκπαιδευτικός θα συνταξιοδοτηθεί, όταν συμπληρώσει 35 χρόνια:

α) πόσοι εκπαιδευτικοί θα συνταξιοδοτηθούν μέσα στα επόμενα 12,5 χρόνια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

- β) πόσοι συνολικά εκπαιδευτικοί πρέπει να προσληφθούν μέσα στα επόμενα πέντε χρόνια, ώστε ο αριθμός των εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία του Δήμου να παραμένει ο ίδιος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Είναι $\frac{v_i}{v}100 = f_i$ και επειδή $v = 100$ έχουμε: $\frac{v_i}{100}100 = f_i$. Επομένως $v_i = f_i$.

A. Τουλάχιστον 15 χρόνια υπηρεσίας έχουν: $15+18+18+12 = 63$ εκπαιδευτικοί.

B. α) Στα επόμενα 12,5 χρόνια θα συνταξιοδοτηθούν αυτοί που έχουν τουλάχιστον $35-12,5 = 22,5$ χρόνια υπηρεσίας. Υποθέτουμε ότι 18 εκπαιδευτικοί στην κλάση 20-25 είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι, οι 9 θα έχουν πάνω από 22,5 χρόνια υπηρεσίας.

Επομένως είναι: $\frac{18}{2} + 18 + 12 = 39$ εκπαιδευτικοί.

β) Τα επόμενα 5 χρόνια θα έχουν συνταξιοδοτηθεί 12 εκπαιδευτικοί. Επομένως θα πρέπει να προσληφθούν 12 εκπαιδευτικοί.